スタディサプリ　私立大 数学ⅠAⅡBについて

この講座は，私立大学における個別試験を受験する生徒を対象に，実際に出題された入試問題を題材に，これまでの学習で培ってきた力をもとに，どのように問題を解きほぐし，アウトプットすべきかを伝授する講座です。

この講座を受けていただく時点でのあなたの実力が，私立大学があなたに期待している解法に対して，どこまで到達し，上回り，また下回っているかについて，予習と講義動画を通じて分野別に整理することで，あなたの今後の学習の指針となるでしょう。

山内　恵介

― 目次 ―

第１講　小問集合，三角比と平面図形 …… 2
第２講　場合の数と確率 …… 5
第３講　微分・積分 …… 8
第４講　ベクトル，数列 …… 11

※授業当日までに，該当する講の「予習」を，ノート等に必ず行ってから授業に臨んで下さい。
当日の授業は，予習を行っていることを前提に行われます。

第１講　小問集合，三角比と平面図形

1　次の空欄に当てはまる数を答えよ．

［1］（1）$2^{\log_8 27}=$ ア である．

（2）$\log_3(x+3)+\log_3(x+5)-\log_3(x+9)=0$ の解は $x=$ イウ である．

（3）$6\cdot3^x+7\sqrt{3^x}-3=0$ の解は $x=$ エオ である．

［2］$0\leqq x\leqq\pi$ のとき，関数 $y=\sin x\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ の最小値は $-\dfrac{\text{カ}}{\text{キ}}$，最大値は $\dfrac{\text{ク}}{\text{ケ}}$ である．

［3］（1）n を自然数とする．$(n+1)^3-n^3$ を 6 で割った余りは コ である．

（2）m, n を自然数とする．等式 $2018=m^2-n$ を満たす最小の n は サ である．

2

[1]　k は実数の定数，i は虚数単位とする．x の方程式 $(3+i)x^2+(6k+i)x+15=0$ が実数解をもつとき，k の値を求めよ．

[2]　関数 $f(x)=x^2+4x-2tx+t^2-4t+7$（t は定数）について，次の空欄に当てはまる数を求めよ．

(1)　関数 $f(x)$ の最小値は，[ア] である．

(2)　関数 $f(x)+\dfrac{4}{f(x)-2}$ は，$x=t-$ [イ]，$t-$ [ウ] で最小値 [エ] をとる．

ただし，[イ] ＜ [ウ] とする．

[3]　a が実数のとき，方程式 $x^3-2x^2+ax=0$ の異なる実数解の個数を求めよ．

3

[1]　3辺の長さが a, $a+ab$, $b+b^2$ である三角形ABCの最も大きい角の大きさを θ とする.

このとき，次の問いに答えよ．ただし，$1<a<b$ かつ $b+b^2<a+ab+1$ とする.

(1)　a, $a+ab$, $b+b^2$ の大小を不等号を用いて表せ.

(2)　$b^2=a^2+1$ が成り立つとき，$\cos\theta$ を a の式で表せ.

(3)　$a=\sqrt{2}$, $b^2=a^2+1$ が成り立つとき，三角形ABCの面積 S を求めよ.

[2]　次の □ をうめよ.

三角形ABCにおいて，AB＝2，AC＝6，$\cos A=\dfrac{1}{4}$ とする．頂点Bから辺ACに垂線を引き，その交点をPとし，頂点Cから辺ABに垂線を引き，その交点をQとする．線分BPと線分CQの交点をRとするとき，CR：RQ＝ □ である．また，四角形AQRPに外接する円の半径は □ である.

第２講　場合の数と確率

1　次の空欄を埋めよ.

［1］ 0，1，2，3，4，5，6 の 7 個の数字から異なる 3 個の数字を選び，それらを 1 個ずつ使って 3 桁の整数を作る．そのような整数の中で，偶数は全部で アイウ 個あり，246 以下の偶数は全部で エオ 個ある.

［2］ さいころを 3 回投げ，出た目を順に a，b，c とする.

このとき，a，b，c の最大値が 4 となる確率は ＿＿ である.

積 abc が 3 の倍数である確率は ＿＿ である.

また，$100a+10b+c$ が 3 の倍数である確率は ＿＿ である.

［3］ 1 から 6 までの番号が書かれた 6 枚のカードがある．6 枚すべてを 1 列に並べるとき，前半 3 枚の数の和が後半 3 枚の数の和より小さい並べ方は ＿＿ 通りある．また，奇数が少なくとも 1 箇所は連続するか，または，偶数が少なくとも 1 箇所は連続するような並べ方は ＿＿ 通りある.

2　サイコロを2回振り，1回目に出る目の数を a，2回目に出る目の数を b とおき，$c=4(a+b)$ とする．このとき，xy 平面上に頂点が $(a,\ c)$ で点 $(0,\ c-a^2)$ を通る，上に凸な放物線 $P_1:y=f(x)$ と，頂点が $(-b,\ 0)$ で点 $(0,\ b^2)$ を通る，下に凸な放物線 $P_2:y=g(x)$ をおく．以下の問に答えよ．

(1)　関数 $f(x)$ および $g(x)$ を a，b を用いて表せ．

(2)　P_1 と P_2 が異なる2点で交わらない確率を求めよ．

P_1 と P_2 が異なる2つの交点をもつとき，交点の x 座標をそれぞれ α，β とおく．

(3)　$\alpha\beta<0$ のとき，a，b が満たす関係式を求めよ．

(4)　$\alpha\beta<0$ となる確率を求めよ．

3

[1]　袋の中に2，3，5，7の数字が書かれた球が1つずつ入っている．この袋から無作為に1つの球を取り出し袋の中に戻す操作を4回行う．この4回の試行のうちk回目に取り出された球に書かれた数字をA_kとし，$X=A_1\times A_2\times A_3\times A_4$とする．たとえば，取り出された球に書かれた数字が順に7，2，2，5であったとき，Xは$7\times 2\times 2\times 5=140$となる．この$X$について，次の問に答えよ．

(1)　Xが奇数になる確率を求めよ．

(2)　Xが5の倍数になる確率を求めよ．

(3)　Xが10の倍数になる確率を求めよ．

[2]　次の［　　］に適する数を埋めよ．

ある手品用の硬貨を1枚投げたとき，表の出る確率は$\frac{3}{4}$，裏の出る確率は$\frac{1}{4}$である．この手品用の硬貨を2枚投げたとき，表がちょうど1枚出る確率は$\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$である．

この手品用の硬貨6枚と普通の硬貨3枚が入った袋から，同時に2枚の硬貨を取り出して投げる試行を考える．ただし，普通の硬貨を1枚投げたとき，表の出る確率，裏の出る確率はともに$\frac{1}{2}$である．取り出した硬貨が2枚とも手品用の硬貨であって，かつ表がちょうど1枚出る確率は$\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$である．また，表がちょうど1枚出る確率は$\frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$である．表がちょうど1枚出たとき，表になっている硬貨が手品用の硬貨である確率は$\frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シス}}}$である．

第３講　微分・積分

1

［1］　次の空欄に適する数を答えよ．

関数 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx$ は，$f(4)=0$ を満たし，$x=3$ で極小値 -27 をとる．このとき，$a=$ □，$b=$ □，$c=$ □ である．p を実数とするとき，点 $(3,\ p)$ を通り，曲線 $y=f(x)$ に接する接線の本数 n について考える．$n=1$ であるような p の値は □ であり，$n=2$ であるような p の値の範囲は □ $<p<$ □，$p<$ □ である．

［2］　関数 $y=|x^3-1|$ のグラフと直線 $y=3x+1$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

［3］　次の □ に適する数を埋めよ．

m を実数とし，関数 $f(x)$ は次を満たすとする．

$$f(x)=mx+2\int_1^2 f(t)\,dt \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

$k=\int_1^2 f(t)\,dt$ とおくと，①より $k=\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}m$ となる．方程式 $y=f(x)$ の表す図形を l とする．l は傾きが m で，m の値に関係なく定点 (エ ，0) を通る直線である．

2　xy 平面上の放物線 $C : y=x^2$ を考える．C に接し，傾きが -2 の直線を l とし，C と l との接点を P とする．k を正の実数として，l を x 軸方向に k だけ平行移動した直線を m とする．

(1)　l，m の方程式を求めよ．

(2)　C と m との 2 つの共有点を Q$(\alpha,\ \alpha^2)$，R$(\beta,\ \beta^2)$ とする．ただし $\alpha<\beta$ とする．$\alpha^2+\beta^2$，$\alpha^3+\beta^3$ の値を k を用いて表せ．

(3)　QR の中点を M とする．M の座標を k を用いて表せ．

(4)　C と線分 QM と線分 PM とで囲まれた領域の面積を S とし，C と線分 RM と線分 PM とで囲まれた領域の面積を T とする．$S-T$ の値を求めよ．

3　a を実数とし，$f(x)=x^3-ax^2-x-a-2$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　点 $(-1,\ f(-1))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線 l の方程式を a を用いて表せ．

(2)　a は $a>-2$ の範囲にあるとする．このとき，曲線 $y=f(x)$，直線 l および y 軸で囲まれた図形のうち，$x\leqq 0$ の範囲にある部分の面積を求めよ．

(3)　実数 t に対して，点 $(t,\ f(t))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の方程式を a，t を用いて表せ．

(4)　a は $-2<a<6$ の範囲にあるとする．このとき，曲線 $y=f(x)$ の接線で原点を通るものは直線 l 以外にないことを示せ．

第4講　ベクトル，数列

1

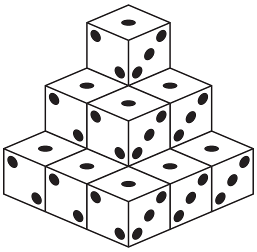
［1］　自然数 $2k-1$ ($k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$) が $2k-1$ 個ずつ続く次のような数列がある．

$$1,\ 3,\ 3,\ 3,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 9,\ \cdots\cdots$$

(1)　m を自然数とする．$2m+1$ が初めて現れるのは第何項かを m で表しなさい．

(2)　初項から第 100 項までの和を求めなさい．

［2］　一辺の長さが 1 のサイコロを，上から一段目には 1 個，二段目には 4 個，三段目には 9 個，一般に n 段目には n^2 個を縦幅と横幅が同じで，角をそろえて順に積み上げる．これを n 段のサイコロピラミッドと呼ぶことにする．図は三段のサイコロピラミッドである．



このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　n 段のサイコロピラミッドを積み上げるために使用されたサイコロの数を n を用いて表せ．

(2)　n 段のサイコロピラミッドの表面積を n を用いて表せ．ただし，表面積にサイコロピラミッドの底面を含むものとする．

(3)　図に示す向きで，すべてのサイコロを同じ方向に向けて積むものとする．n 段のサイコロピラミッドの表面のサイコロの目の数の総和を n を用いて表せ．ただし，サイコロの向かい合う面の目の和はすべて 7 とし，サイコロピラミッドの底面も数えるものとする．

2 平面上の5点O，A，B，C，Pに対して，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ とする．これらのベクトルは，以下の条件をすべて満たしている．

・$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$　・$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は垂直である．　・$\vec{a}$ と $\vec{c}$ のなす角は $\dfrac{\pi}{6}$ である．

・$\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角は $\dfrac{\pi}{3}$ である．　・$\vec{p}=\vec{a}+\vec{c}$

また，$\angle\mathrm{OBP}=\theta$ $(0<\theta<\pi)$ とする．このとき，次の問(1)～(5)に答えよ．

(1) $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ となるような実数 x，y の値をそれぞれ求めよ．

(2) $\overrightarrow{BO}$ と $\overrightarrow{BP}$ の内積を求めよ．

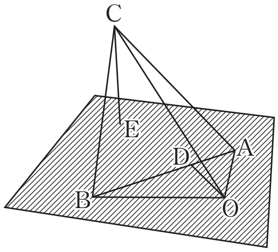
(3) $\cos^2\theta$ の値を求めよ．

(4) $\cos 2\theta$ の値を求めよ．

(5) θ の値を求めよ．

3　次の空欄を埋めよ．

四面体 OABC において，OA＝2，OB＝3，AB＝4，OC＝5，∠AOC＝60°，∠BOC＝60°とする．さらに，頂点 O から辺 AB へ下ろした垂線と AB との交点を D，頂点 C から面 OAB を含む平面へ下ろした垂線とその平面との交点を E とする．



(1)　$\overrightarrow{OD}=\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キク}}\overrightarrow{OB}$ である．

(2)　$\overrightarrow{CE}=\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\boxed{サシ}}{\boxed{ス}}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$ である．

(3)　四面体 OABC の体積は $\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}\sqrt{\boxed{タ}}$ である．

テキスト解答

【講義問題の解答・解説】

第１講　小問集合，三角比と平面図形

1 [1] (1) $\log_8 27=\dfrac{\log_2 27}{\log_2 8}=\dfrac{\log_2 3^3}{\log_2 2^3}=\dfrac{3\log_2 3}{3\log_2 2}=\log_2 3$

よって，$2^{\log_8 27}=2^{\log_2 3}=3$

(2) 真数条件より $x+3>0$，$x+5>0$，$x+9>0$

よって，$x>-3$ …… ①

$\log_3(x+3)+\log_3(x+5)=\log_3(x+9)$

$\log_3(x+3)(x+5)=\log_3(x+9)$

$(x+3)(x+5)=x+9$　　$x^2+7x+6=0$　　$(x+6)(x+1)=0$

①より $x=-1$

(3) $3^x=t$ とおく．

$6t+7\sqrt{t}-3=0$　　$6(\sqrt{t})^2+7\sqrt{t}-3=0$

$(3\sqrt{t}-1)(2\sqrt{t}+3)=0$　　$\sqrt{t}>0$ より $\sqrt{t}=\dfrac{1}{3}$　　$t=\dfrac{1}{9}$

よって $3^x=\dfrac{1}{9}=3^{-2}$　　よって $x=-2$

[2] $y=\sin x\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=\sin x\left(\cos x\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin x\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=\sin x\left(\cos x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sin x\cdot\dfrac{1}{2}\right)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x+\dfrac{1}{2}\sin^2 x$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\dfrac{1}{4}(1-\cos 2x)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x-\dfrac{1}{4}\cos 2x+\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{1}{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{4}$

$0\leqq x\leqq\pi$ より $0\leqq 2x\leqq 2\pi$　よって $-\dfrac{\pi}{6}\leqq 2x-\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{11}{6}\pi$

よって，$2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき　最小値は $\dfrac{1}{2}\cdot(-1)+\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}$

$2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき　最大値は $\dfrac{1}{2}\cdot 1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

[3] (1) $(n+1)^3-n^3=n^3+3n^2+3n+1-n^3=3n^2+3n+1$

$=3n(n+1)+1$

$n(n+1)$ は連続する2つの自然数の積，すなわち2の倍数である．

よって，$3n(n+1)$ は6の倍数であることより，$(n+1)^3-n^3$ を6で割った余りは1

⑵　$2018=m^2-n$ より $n=m^2-2018$

$44^2=1936$，$45^2=2025$ より

求める最小の自然数 n は，$m=45$ のときの $n=45^2-2018=2025-2018=7$

2 [1] $(3+i)x^2+(6k+i)x+15=0$ が実数解 α をもつとすると，

$(3+i)\alpha^2+(6k+i)\alpha+15=0$　これを変形して

$3(\alpha^2+2k\alpha+5)+(\alpha^2+\alpha)i=0$

k，α は実数より，$\alpha^2+2k\alpha+5=0$ かつ $\alpha^2+\alpha=0$

したがって，$\alpha=-1$，$k=3$

[2] ⑴　$f(x)=x^2+4x-2tx+t^2-4t+7=x^2-2(t-2)x+t^2-4t+7$

$=\{x-(t-2)\}^2+3$

よって $f(x)$ は $x=t-2$ のとき最小値3をとる．

⑵　⑴より $f(x)\geqq 3$　　よって $f(x)-2\geqq 1>0$

したがって，相加平均と相乗平均の関係より

$$f(x)+\frac{4}{f(x)-2}=f(x)-2+\frac{4}{f(x)-2}+2$$

$$\geqq 2\sqrt{\{f(x)-2\}\cdot\frac{4}{f(x)-2}}+2=6$$

等号成立は $f(x)-2=\dfrac{4}{f(x)-2}$　　$\{f(x)-2\}^2=4$　　$f(x)-2=2$

つまり $f(x)=4$ のときであり，それは

$\{x-(t-2)\}^2+3=4$ より $x-(t-2)=\pm 1$　　つまり $x=t-1$，$t-3$ のとき

したがって，$f(x)+\dfrac{4}{f(x)-2}$ は，$x=t-1$，$t-3$ のとき最小値6をとる．

[3]　$x^3-2x^2+ax=0$ より $x(x^2-2x+a)=0$

$x=0$ または $x^2-2x+a=0$

$x^2-2x+a=0$ の判別式を D とする．

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot a=1-a$ より

$D>0$ のとき $a<1$，$D=0$ のとき $a=1$，$D<0$ のとき $a>1$

よって，$x^2-2x+a=0$ の異なる実数解の個数は

$a<1$ のとき2個　　$a=1$ のとき1個　　$a>1$ のとき0個

また，$x^2-2x+a=0$ が $x=0$ を解にもつのは $a=0$ のとき．

よって，求める異なる実数解の個数は

$a<0$，$0<a<1$ のとき3個

$a=0$，1のとき　2個

$a>1$ のとき　1個

3 [1] (1) $1<a<b$ より

$(a+ab)-a=ab>0$

$(b+b^2)-(a+ab)=b(1+b)-a(1+b)=(b+1)(b-a)>0$

よって，$a<a+ab<b+b^2$

(2) 最大角の対辺が最大辺より，θ の対辺の長さは $b+b^2$

$$\cos\theta=\frac{a^2+(a+ab)^2-(b+b^2)^2}{2\cdot a\cdot(a+ab)}=\frac{a^2+a^2(1+b)^2-b^2(1+b)^2}{2a^2(1+b)}$$

$$=\frac{a^2+(a^2-b^2)(1+b)^2}{2a^2(1+b)}$$

ここで，$a^2=b^2-1$ より

$$\cos\theta=\frac{b^2-1+(-1)\cdot(1+b)^2}{2a^2(1+b)}=\frac{-2(1+b)}{2a^2(1+b)}=-\frac{1}{a^2}$$

(3) $a=\sqrt{2}$，$b^2=a^2+1$ のとき，(2)より $\cos\theta=-\frac{1}{2}$

$0°<\theta<180°$ より $\theta=120°$　　また，$b^2=a^2+1=\left(\sqrt{2}\right)^2+1=3$ より $b=\sqrt{3}$

よって，$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot(a+ab)\cdot\sin 120°=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

[2] △ABP において $\mathrm{AP}=\mathrm{AB}\cos A=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$　　よって　$\mathrm{PC}=\frac{11}{2}$

△ACQ において $\mathrm{AQ}=\mathrm{AC}\cos A=6\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$　よって　$\mathrm{QB}=\frac{1}{2}$

メネラウスの定理より

$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BQ}}\cdot\frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{RC}}\cdot\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PA}}=1$　　$\frac{4}{1}\cdot\frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{RC}}\cdot\frac{11}{1}=1$

よって $\frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{RC}}=\frac{1}{44}$ より CR：RQ＝44：1

△ACQ において $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

よって，$\mathrm{CQ}=\mathrm{AC}\sin A=6\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{3\sqrt{15}}{2}$ より

$\mathrm{RQ}=\mathrm{CQ}\cdot\frac{1}{45}=\frac{3\sqrt{15}}{2}\cdot\frac{1}{45}=\frac{\sqrt{15}}{30}=\sqrt{\frac{1}{60}}$

したがって，四角形 AQRP に外接する円の半径を r とすると，△AQR で正弦定理より $2r=\mathrm{AR}=\sqrt{\mathrm{AQ}^2+\mathrm{QR}^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{60}}=\sqrt{\frac{34}{15}}=\frac{\sqrt{510}}{15}$

よって　$r=\frac{\sqrt{510}}{30}$

第２講　場合の数と確率

1 ［1］3 桁の偶数となるのは

1 の位が 0 のとき

100，10 の位は 1〜6 から異なる 2 個を取り出す順列の総数で ${}_6P_2=30$ 通り

1 の位が 2 のとき

100, 10 の位は 2 以外の 6 個から異なる 2 個を取り出す順列のうち，100 の位が 0 になるものを除く $5\times5=25$ 通り

1 の位が 4，6 のときも同様に 25 通り

よって，3 桁の偶数は $30+25\times3=105$ 個

246 以下の偶数となるのは

100 の位が 1 のとき

1 の位は 0，2，4，6 の 4 通り，10 の位は 5 通り．よって，$4\times5=20$ 通り

100 の位が 2 のとき

10 の位が 0 のとき，1 の位は 4，6 の 2 通り

10 の位が 1，3 のとき，1 の位は 0，4，6 の 3 通り

10 の位が 4 のとき，1 の位は 0，6 の 2 通り

よって，246 以下の偶数は $20+2+2\times3+2=30$ 個

［2］出る目のすべての場合の数は 6^3 通り

a，b，c の最大値が 4 となるのは

(a，b，c がすべて 4 以下)$-$(a，b，c がすべて 3 以下)$=4^3-3^3=37$ 通り

よって，求める確率は $\dfrac{37}{6^3}=\dfrac{37}{216}$

積 abc が 3 の倍数である事象の余事象は，a，b，c がすべて 3 の倍数でない場合で，4^3 通り

よって，求める確率は $1-\dfrac{4^3}{6^3}=\dfrac{19}{27}$

$100a+10b+c$ が 3 の倍数である事象は，$a+b+c$ が 3 の倍数である事象に等しい．

$a+b+c$ が 3 の倍数である組合せは

(1，1，1)，(1，1，4)，(1，2，3)，(1，2，6)，(1，3，5)，(1，4，4)，(1，5，6)，

(2，2，2)，(2，2，5)，(2，3，4)，(2，4，6)，(2，5，5)，(3，3，3)，(3，3，6)，

(3，4，5)，(3，6，6)，(4，4，4)，(4，5，6)，(5，5，5)，(6，6，6)

これらの順列を考えて，$3!\times8+\dfrac{3!}{2!}\times6+1\times6=72$ 通り

よって，求める確率は $\dfrac{72}{6^3}=\dfrac{1}{3}$

［3］6 枚のカードの数の和は $1+2+3+4+5+6=21$

よって，前半の 3 枚の数の和を x とすると，後半 3 枚の数の和は $21-x$

題意より $x<21-x$　　$x<\frac{21}{2}=10.5$　したがって，前半3枚の数の和は10以下.

これを満たす3枚の数の組合せは

(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6), (1, 3, 4),
(1, 3, 5), (1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5)

の10通りで，それぞれの順列が3! 通りある.

また，そのそれぞれについて，後半の3枚の数の順列が3! 通りある.

よって，前半の3枚の数の和が，後半の3枚の数の和より小さい並べ方は，

$10\times3!\times3!=360$ 通り

奇数が少なくとも1箇所は連続するか，または，偶数が少なくとも1箇所は連続する事象の余事象は，奇数も偶数も連続しない場合であり，それは偶数と奇数が交互に並ぶ場合である.

奇数を3枚並べる並べ方が3! 通り，偶数を3枚並べる並べ方が3! 通り

偶数と奇数が交互に並ぶ方法は，

「偶奇偶奇偶奇」「奇偶奇偶奇偶」の2通りあるから，

偶数と奇数が交互に並ぶ場合の並べ方は，$3!\times3!\times2$ 通り

よって，求める並べ方は，$6!-3!\times3!\times2=720-72=648$ 通り

2 (1)　放物線 P_1 は，頂点が $(a,\ c)$ で上に凸であることより，

$f(x)=p(x-a)^2+c$ $(p<0)$ とおける.

これが点 $(0,\ c-a^2)$ を通るので，$pa^2+c=c-a^2$

$pa^2=-a^2$　　$a\neq0$ より $p=-1(<0)$

これと $c=4(a+b)$ より，$f(x)=-(x-a)^2+4(a+b)$

放物線 P_2 は，頂点が $(-b,\ 0)$ で下に凸であることより，

$g(x)=q(x+b)^2$ $(q>0)$ とおける.

これが点 $(0,\ b^2)$ を通るので，$b^2=qb^2$　　$b\neq0$ より $q=1(>0)$

よって，$g(x)=(x+b)^2$

(2)　P_1 と P_2 の共有点の x 座標は

$-(x-a)^2+4(a+b)=(x+b)^2$ の2解

$2x^2-2(a-b)x+a^2+b^2-4(a+b)=0$ …… ①

P_1 と P_2 が異なる2点で交わらないのは，判別式を D とすると，$D\leqq0$ のとき

$\frac{D}{4}=(a-b)^2-2\cdot\{a^2+b^2-4(a+b)\}\leqq0$

$(a+b)^2-8(a+b)\geqq0$

$(a+b)(a+b-8)\geqq0$

a，b はサイコロの目より，$a+b>0$　　よって，$a+b-8\geqq0$

ゆえに $8\leqq a+b\leqq12$　　これを満たす $(a,\ b)$ の組合せは

(2, 6), (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6)

であり，これらの順列は $6\times2!+3=15$ 通り

よって，求める確率は $\dfrac{15}{6^2}=\dfrac{5}{12}$

(3)　P_1 と P_2 が2つの交点をもつとき，(2)より $2\leqq a+b\leqq7$ のとき

このとき，①の2解 α，β について，解と係数の関係より

$\alpha\beta=\dfrac{a^2+b^2-4(a+b)}{2}<0$

よって，a，b が満たす関係式は $a^2+b^2<4(a+b)$，$2\leqq a+b\leqq7$

(4)　(3)より $(a-2)^2+(b-2)^2<8$ かつ $2\leqq a+b\leqq7$

$a=1$，2，3 のとき $b=1$，2，3，4　　$a=4$ のとき $b=1$，2，3

よって，求める確率は $\dfrac{3\times4+1\times3}{6^2}=\dfrac{15}{6^2}=\dfrac{5}{12}$

3 [1] (1)　積 X が奇数になるのは，4回とも奇数の数が出るとき．

よって，求める確率は $\left(\dfrac{3}{4}\right)^4=\dfrac{81}{256}$

(2)　積 X が5の倍数にならないのは，4回とも5以外が出るとき．

よって，求める確率は $1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^4=1-\dfrac{81}{256}=\dfrac{175}{256}$

(3)　積 X が2の倍数である事象を B，積 X が5の倍数である事象を C とすると，求める確率は

$$P(B\cap C)=1-P(\overline{B\cap C})=1-P(\overline{B}\cup\overline{C})=1-\{P(\overline{B})+P(\overline{C})-P(\overline{B}\cap\overline{C})\}$$

(1)より $P(\overline{B})=\dfrac{81}{256}$，(2)より $P(\overline{C})=\dfrac{81}{256}$

また，$\overline{B}\cap\overline{C}$ は4回とも3または7が出るときで，$P(\overline{B}\cap\overline{C})=\left(\dfrac{2}{4}\right)^4=\dfrac{16}{256}$

よって，求める確率は $1-\left(\dfrac{81}{256}+\dfrac{81}{256}-\dfrac{16}{256}\right)=\dfrac{55}{128}$

[2] 手品用の硬貨を2枚投げたとき，表がちょうど1枚出る確率は ${}_2\mathrm{C}_1\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{8}$

手品用の硬貨6枚と普通の硬貨3枚が入った袋から同時に2枚の硬貨を取り出して投げるときを考える．

取り出した硬貨が2枚とも手品用の硬貨であって，かつ表がちょうど1枚出る確率は

$\dfrac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{5}{32}$

取り出した硬貨が手品用1枚，普通の硬貨1枚であって，かつ表がちょうど1枚出る

確率は $\dfrac{{}_6\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_2}\times\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{{}_6\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_2}\times\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{16}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{4}$

取り出した硬貨が2枚とも普通の硬貨であって，かつ表がちょうど1枚出る確率は

$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}\cdot{}_2\mathrm{C}_1\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{24}$

よって，表がちょうど１枚出る確率は $\dfrac{5}{32}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{24}=\dfrac{43}{96}$

表がちょうど１枚出たとき，表になっている硬貨が手品用の硬貨である条件つき確率は

$$\frac{\dfrac{5}{32}+\dfrac{3}{16}}{\dfrac{43}{96}}=\frac{33}{43}$$

第３講　微分・積分

1　［1］$f(4)=0$ より $4^4+4^3a+4^2b+4c=0$　　よって $16a+4b+c=-64$ …… ①

また，$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

$f(x)$ が $x=3$ で極小値 -27 をとるので，

$f'(3)=0$ より $27a+6b+c=-108$ …… ②

$f(3)=-27$ より $3^4+3^3a+3^2b+3c=-27$　よって $9a+3b+c=-36$ …… ③

①，②，③より $a=-4$，$b=0$，$c=0$

このとき，$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$ より，$x=3$ の前後で $f'(x)$ は負から正に転じ，$f(x)$ は $x=3$ で極小値をもつ．

$f(x)=x^4-4x^3$ より，点 $(t,\ t^4-4t^3)$ における接線の方程式は

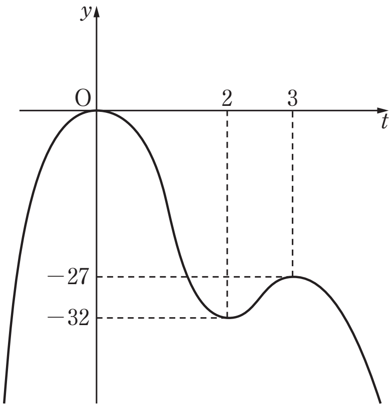
$$y=(4t^3-12t^2)(x-t)+t^4-4t^3 \text{ つまり } y=(4t^3-12t^2)x-3t^4+8t^3$$

これが $(3,\ p)$ を通るとき，$p=-3t^4+20t^3-36t^2$ …… ④

$g(t)=-3t^4+20t^3-36t^2$ とおくと $g'(t)=-12t^3+60t^2-72t=-12t(t-2)(t-3)$

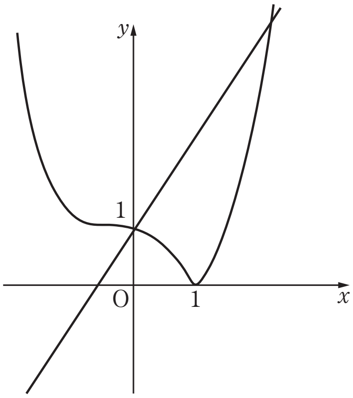
$g(t)$ の増減表および $y=g(t)$ のグラフは以下．

t	…	0	…	2	…	3	…
$g'(t)$	＋	0	－	0	＋	0	－
$g(t)$	↗	0	↘	-32	↗	-27	↘



接線の本数 n は，t の方程式④の異なる実数解の個数であり，2 グラフ $y=g(t)$ と $y=p$ の異なる交点の個数である．よって，$n=1$ となるのは $p=0$ のときであり，$n=2$ となるのは $-27<p<0$，$p<-32$ のときである．

［2］$y=|x^3-1|=\begin{cases} x^3-1 & (x\geqq 1) \\ -x^3+1 & (x<1) \end{cases}$ より，$y=|x^3-1|$ および $y=3x+1$ のグラフの概形は右図．



$y=x^3-1$ $(x>1)$ と $y=3x+1$ の交点の x 座標は

$x^3-1=3x+1$　　$(x+1)^2(x-2)=0$ より $x=2$

よって，求める面積を S とすると

$$S=\int_0^1\{(3x+1)-(-x^3+1)\}\,dx+\int_1^2\{(3x+1)-(x^3-1)\}\,dx$$

$$=\int_0^1(x^3+3x)\,dx+\int_1^2(-x^3+3x+2)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_1^2=\frac{7}{4}+\frac{11}{4}=\frac{9}{2}$$

[3] $k=\int_1^2 f(t)dt$ より，$f(x)=mx+2k$

$$k=\int_1^2 (mt+2k)dt=\left[\frac{m}{2}t^2+2kt\right]_1^2=2m+4k-\left(\frac{m}{2}+2k\right)=2k+\frac{3}{2}m$$

よって $k=-\frac{3}{2}m$

このとき $y=f(x)=mx-3m=m(x-3)$ が表す図形 l は，定点 $(3,\ 0)$ を通る直線である．

2 (1)　$C:y=x^2$ より $y'=2x$　　$2x=-2$ より $x=-1$

よって，C と l の接点の x 座標は $x=-1$ より l の方程式は

$$y=-2(x+1)+(-1)^2 \quad \text{つまり}\ y=-2x-1$$

m の方程式は $y=-2(x-k)-1$ より $y=-2x+2k-1$

(2)　C と m の共有点の x 座標は，方程式 $x^2=-2x+2k-1$

つまり $x^2+2x-2k+1=0$ の2解である．これらを α，β とすると

解と係数の関係より $\alpha+\beta=-2$，$\alpha\beta=-2k+1$

よって，$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2(-2k+1)=4k+2$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-2)^3-3\cdot(-2k+1)\cdot(-2)=-12k-2$$

(3)　QR の中点 M の座標は $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$　よって $\mathrm{M}(-1,\ 2k+1)$

(4)　点 M と点 P の x 座標はともに $x=-1$

$\alpha \leqq x \leqq \beta$ において，$-2x+2k-1 \geqq x^2$ より

$$\begin{aligned}
S-T&=\int_\alpha^{-1}(-2x+2k-1-x^2)\,dx-\int_{-1}^\beta(-2x+2k-1-x^2)\,dx\\
&=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+(2k-1)x\right]_\alpha^{-1}-\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+(2k-1)x\right]_{-1}^\beta\\
&=\left\{\frac{1}{3}-1-(2k-1)\right\}-\left\{-\frac{1}{3}\alpha^3-\alpha^2+(2k-1)\alpha\right\}\\
&\quad-\left\{-\frac{1}{3}\beta^3-\beta^2+(2k-1)\beta\right\}+\left\{\frac{1}{3}-1-(2k-1)\right\}\\
&=\frac{2}{3}-4k+\frac{1}{3}(\alpha^3+\beta^3)+(\alpha^2+\beta^2)-(2k-1)(\alpha+\beta)\\
&=\frac{2}{3}-4k+\frac{1}{3}(-12k-2)+(4k+2)-(2k-1)\cdot(-2)\\
&=0
\end{aligned}$$

3 (1)　$f(x)=x^3-ax^2-x-a-2$ より $f'(x)=3x^2-2ax-1$

$f(-1)=-2a-2$，$f'(-1)=2a+2$ より，点 $(-1,\ f(-1))$ における $y=f(x)$ の接線 l の方程式は $y=(2a+2)(x+1)-2a-2$　　よって $y=(2a+2)x$

(2)　$y=f(x)$ と直線 l の共有点の x 座標は

$x^3-ax^2-x-a-2=(2a+2)x$

$x^3-ax^2-(2a+3)x-a-2=0$

$(x+1)^2(x-a-2)=0$ より $x=-1,\ a+2$

$a>-2$ より $a+2>0$

よって，曲線 $y=f(x)$，直線 l および y 軸 $(x=0)$ で囲まれた図形のうち，

$x\leqq 0$ の範囲にある部分の面積は

$$\int_{-1}^{0}\{(2a+2)x-(x^3-ax^2-x-a-2)\}\,dx$$

$$=-\int_{-1}^{0}(x+1)^2(x-a-2)\,dx$$

$$=-\int_{-1}^{0}(x+1)^2\{(x+1)-(a+3)\}\,dx$$

$$=-\int_{-1}^{0}\{(x+1)^3-(a+3)(x+1)^2\}\,dx$$

$$=-\left[\frac{(x+1)^4}{4}-(a+3)\cdot\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{0}=-\left(\frac{1}{4}-\frac{a+3}{3}\right)=\frac{4a+9}{12}$$

(3)　$(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y=(3t^2-2at-1)(x-t)+t^3-at^2-t-a-2$$

よって $y=(3t^2-2at-1)x-2t^3+at^2-a-2$ …… ①

(4)　①が原点を通るとき

$0=-2t^3+at^2-a-2$ …… ②

$(t+1)\{2t^2-(a+2)t+a+2\}=0$

$t=-1$，または $2t^2-(a+2)t+a+2=0$ …… ③

③の判別式を D とすると $D=(a+2)^2-4\cdot 2\cdot(a+2)=(a+2)(a-6)$

$-2<a<6$ のとき $D<0$　よって，③は実数解をもたない．

したがって，②の実数解は $t=-1$ であり，$t=-1$ のときの $y=f(x)$ の接線は(1)より直線 l である．

したがって，曲線 $y=f(x)$ の接線で原点を通るものは直線 l 以外にない．

第4講　ベクトル，数列

1 ［1］自然数 $2k-1$ が $2k-1$ 個ずつ属する群を第 k 群とする．

(1)　$2k-1=2m+1$ より $k=m+1$

よって，$2m+1$ は第 $m+1$ 群に属し，$2m+1$ が初めて現れるのは第 $m+1$ 群の最初の項．

初項から第 m 群までに含まれる項の数は

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(2k-1)=2\cdot\frac{1}{2}m(m+1)-1\cdot m=m^2$ である．

$2m+1$ が初めて現れるのは第 m^2+1 項

(2)　$100=10^2$ より，第100項は第10群の最後の項である．

第 k 群に属する項の総和は $(2k-1)\times(2k-1)=4k^2-4k+1$ であるから，

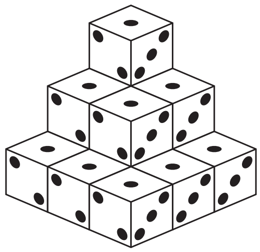
求める和は $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(4k^2-4k+1)=4\cdot\frac{1}{6}\cdot10\cdot11\cdot21-4\cdot\frac{1}{2}\cdot10\cdot11+1\cdot10=1330$

［2］(1)　k 段目に使用するサイコロは k^2 個

よって，n 段のサイコロピラミッドを積み上げるために使用されたサイコロの数は

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(2)　サイコロの1つの面の面積は1である．また，すべてのサイコロを，図のように同じ方向に向けるとする．



1の目の面の面積，6の目の面の面積はともに n^2 である．

また，k 段目における2，3，4，5の目の面の面積は

$k\times4=4k$ である．

よって，サイコロピラミッドの表面積は

$\displaystyle n^2\times2+\sum_{k=1}^{n}4k=2n^2+4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=4n^2+2n$

(3)　サイコロピラミッドを真上から見ると，1の目は n^2 個あるので，その和は

$1\times n^2=n^2$

サイコロピラミッドの底面を見ると，6の目は n^2 個あるので，その和は

$6\times n^2=6n^2$

2，3，4，5の目はそれぞれ $\displaystyle 1+2+3+\cdots\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$ 個ずつあるので，その和は $\displaystyle(2+3+4+5)\times\frac{1}{2}n(n+1)=7n(n+1)$

よって求める目の和は $n^2+7n(n+1)+6n^2=14n^2+7n$

2 (1)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は垂直より $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\vec{a}$ と $\vec{c}$ のなす角は $\dfrac{\pi}{6}$ より $\displaystyle\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos\frac{\pi}{6}=2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

$\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角は $\dfrac{\pi}{3}$ より $\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\dfrac{\pi}{3}=2\times2\times\dfrac{1}{2}=2$

$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ とおくと

$\vec{a}\cdot\vec{c}=2\sqrt{3}$ より $\vec{a}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b})=2\sqrt{3}$　　$x|\vec{a}|^2+y\vec{a}\cdot\vec{b}=2\sqrt{3}$

よって $x\cdot2^2=2\sqrt{3}$ より　$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=2$ より $\vec{b}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b})=2$　　$xa\cdot b+y|\vec{b}|^2=2$

よって $y\cdot2^2=2$ より $y=\dfrac{1}{2}$

(2)　$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=\vec{p}-\vec{b}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

よって，$\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BP}=-\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})=-\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}=2^2-2=2$

(3)　$|\overrightarrow{BO}|=|-\vec{b}|=2$

$|\overrightarrow{BP}|^2=|\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}$

$=2^2+2^2+2^2-2\times2+2\times2\sqrt{3}=8+4\sqrt{3}$

$=8+2\sqrt{12}=(\sqrt{6})^2+2\sqrt{6}\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$

$|\overrightarrow{BP}|>0$ より $|\overrightarrow{BP}|=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

よって，$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{BO}||\overrightarrow{BP}|}=\dfrac{2}{2(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

したがって，$\cos^2\theta=\dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4^2}=\dfrac{8-4\sqrt{3}}{4^2}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$

(4)　$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=2\cdot\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}-1=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(5)　(3)より $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ であり，$0<\cos\theta<1$ より $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$　よって $0<2\theta<\pi$

したがって(4)より $2\theta=\dfrac{5}{6}\pi$ より $\theta=\dfrac{5}{12}\pi$

3 (1)　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2}{2}=\dfrac{2^2+3^2-4^2}{2}=-\dfrac{3}{2}$

$\overrightarrow{OD}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ とおくと，OD⊥AB より $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$\{(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0$

$(1-t)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-(1-t)|\overrightarrow{OA}|^2+t|\overrightarrow{OB}|^2-t\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$-\dfrac{3}{2}(1-t)-(1-t)\cdot2^2+t\cdot3^2-t\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)=0$　　よって $t=\dfrac{11}{32}$

したがって $\overrightarrow{OD}=\dfrac{21}{32}\overrightarrow{OA}+\dfrac{11}{32}\overrightarrow{OB}$

(2)　$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\cos60^\circ=3\times5\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{15}{2}$

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OA}|\cos60^\circ=5\times2\times\dfrac{1}{2}=5$

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OE}=-\overrightarrow{OC}+u\overrightarrow{OA}+v\overrightarrow{OB}$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{CE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ より

$$(u\overrightarrow{\mathrm{OA}}+v\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$

$$u|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+v\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$

よって $4u-\dfrac{3}{2}v-5=0$ …… ①

$\overrightarrow{\mathrm{CE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ より

$$(u\overrightarrow{\mathrm{OA}}+v\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$$

$$u\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+v|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$$

よって $-\dfrac{3}{2}u+9v-\dfrac{15}{2}=0$ …… ②

①，②より $u=\dfrac{5}{3}$，$v=\dfrac{10}{9}$　　したがって $\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{10}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2^2\times3^2-\left(-\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4\times9-\frac{9}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{9\times\left(4-\frac{1}{4}\right)}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|^2=\left|\frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{10}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2$$

$$=\frac{25}{9}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\frac{100}{81}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$$

$$+2\times\frac{50}{27}\times\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-2\times\frac{10}{9}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-2\times\frac{5}{3}\times\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$=\frac{100}{9}+\frac{100}{9}+25-\frac{50}{9}-\frac{150}{9}-\frac{50}{3}=\frac{25}{3}$$

よって $\mathrm{CE}=\sqrt{\dfrac{25}{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

したがって，求める体積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{OAB}\times\mathrm{CE}=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{15}}{4}\times\frac{5\sqrt{3}}{3}=\frac{5}{4}\sqrt{5}$$

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。